Kansrekening 2003/2004
Tentamen, in totaal 4 opgaven
24 augustus 2004; 09:00 – 12:00.

- Opgave 1. Een vaas bevat één witte en één rode bal. Je trekt één bal uit deze vaas. Is de getrokken bal rood, dan leg je die bal met nog twee andere rode ballen in de vaas terug. Is de getrokken bal wit, dan leg je hem samen met nog één andere witte bal in de vaas terug.
  Vervolgens trek je opnieuw één bal uit de vaas.

  (a) Zij $A :=$ 'eerste getrokken bal is rood', en $B :=$ 'tweede getrokken bal is rood'. Bepaal $P(A)$, $P(B|A)$, $P(B)$ en $P(A|B)$.
  (b) Zij X het totaal aantal rode ballen dat je in 1e en 2e trekking hebt getrokken (dus: $X \in \{0,1,2\}$). Bepaal de kansverdeling van X. Bepaal ook $E(X)$ en $Var(X)$.

- Opgave 2. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn, beide Uniform $(0,1)$ verdeeld [dus (X,Y) is uniform verdeeld op het eenheidsvierkant $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$]. Definieer $U :=$ minimum (X,Y) en $V :=$ maximum (X,Y).

  (a) Geef in een figuur aan voor welk deel van $(0,1)^2$ geldt dat $U \leq u$ (met $0<u<1$). Geef ook in een figuur aan voor welk deel van $(0,1)^2$ geldt dat $V \leq v$ (met $0<v<1$).
  Leidt hieruit af dat U kansdichtheid $f_U(u) = 2(1-u)\,1_{(0,1)}(u)$ heeft, en dat V kansdichtheid $f_V(v) = 2v\,1_{(0,1)}(v)$ heeft.
  (b) Bereken $E(U)$, $E(V)$, $Var(U)$ en $Var(V)$.
  (c) Bereken ook $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$ en $Var(Y)$.
  (d) Toon aan: $U+V = X+Y$. Bereken hiermee $Var(U+V)$.
  (e) Bereken $Cov(U,V)$ m.b.v. $Var(U+V)$, $Var(U)$ en $Var(V)$.

- Opgave 3. Laat $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke stochasten zijn, alle Poissonverdeeld met parameter $\alpha = 0{,}8$.
  Zij $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

  (a) Toon aan $E(X_1) = 0{,}8$ en $Var(X_1) = 0{,}8$.
  Bepaal ook $E(S_5)$ en $Var(S_5)$.
  (b) Benader $P(2 < S_5 < 6)$ met behulp van de Centrale Limiet Stelling - zònder continuïteits correctie.
  (c) Benader vervolgens $P(2 < S_5 < 6)$ met behulp van de Centrale Limietstelling - mèt continuïteitscorrectie.
  (d) Wat is de kansverdeling van S_5? Bepaal hiermee $P(2 < S_5 < 6)$ exact.

- Opgave 4. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn, beide $Exp(\lambda)$ - verdeeld. Definieer stochast Z door $Z := X + Y$.

  (a) Toon aan: de simultane kansdichtheid van X en Z is
  $$f(x, z) = \lambda^2 e^{-\lambda z} \, 1_{(0,z)}(x) \, 1_{(0,\infty)}(z).$$
  (b) Bepaal de kansdichtheid van Z.
  (c) Bepaal de conditionele kansdichtheid $f(x|z)$ van X gegeven $Z = z$.

Enkele kansverdelingen:

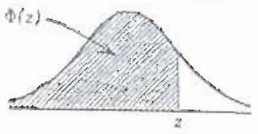
X is Poisson(α) verdeeld: $P(X = k) = \dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

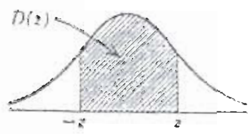
X is Gamma(r, λ) verdeeld: kansdichtheid van X is
$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \, 1_{(0,\infty)}(x)$$

(en: $Exp(\lambda)$-verdeling $\equiv$ Gamma$(1, \lambda)$-verdeling).

3 Normal Distribution

Table 3a. Distribution Function (3), Sec. 8.2



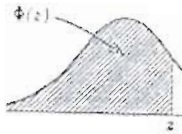


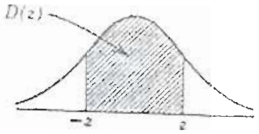
$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(0) = 0.5$
More extended tables: National Bureau of Standards (1953), Hald (1962). Index for further tables: Greenwood and Hartley (1961) (cf. Appendix 3).

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0080
0.02	4920	5080	0160
0.03	4880	5120	0239
0.04	4840	5160	0319
0.05	4801	5199	0399
0.06	4761	5239	0478
0.07	4721	5279	0558
0.08	4681	5319	0638
0.09	4641	5359	0717
0.10	4602	5398	0797
0.11	4562	5438	0876
0.12	4522	5478	0955
0.13	4483	5517	1034
0.14	4443	5557	1113
0.15	4404	5596	1192
0.16	4364	5636	1271
0.17	4325	5675	1350
0.18	4286	5714	1428
0.19	4247	5753	1507
0.20	4207	5793	1585
0.21	4168	5832	1663
0.22	4129	5871	1741
0.23	4090	5910	1819
0.24	4052	5948	1897
0.25	4013	5987	1974
0.26	3974	6026	2051
0.27	3936	6064	2128
0.28	3897	6103	2205
0.29	3859	6141	2282
0.30	3821	6179	2358
0.31	3783	6217	2434
0.32	3745	6255	2510
0.33	3707	6293	2586
0.34	3669	6331	2661
0.35	3632	6368	2737
0.36	3594	6406	2812
0.37	3557	6443	2886
0.38	3520	6480	2961
0.39	3483	6517	3035
0.40	3446	6554	3108
0.41	3409	6591	3182
0.42	3372	6628	3255
0.43	3336	6664	3328
0.44	3300	6700	3401
0.45	3264	6736	3473
0.46	3228	6772	3545
0.47	3192	6808	3616
0.48	3156	6844	3688
0.49	3121	6879	3759
0.50	3085	6915	3829

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
0.51	3050	6950	3899
0.52	3015	6985	3969
0.53	2981	7019	4039
0.54	2946	7054	4108
0.55	2912	7088	4177
0.56	2877	7123	4245
0.57	2843	7157	4313
0.58	2810	7190	4381
0.59	2776	7224	4448
0.60	2743	7257	4515
0.61	2709	7291	4581
0.62	2676	7324	4647
0.63	2643	7357	4713
0.64	2611	7389	4778
0.65	2578	7422	4843
0.66	2546	7454	4907
0.67	2514	7486	4971
0.68	2483	7517	5035
0.69	2451	7549	5098
0.70	2420	7580	5161
0.71	2389	7611	5223
0.72	2358	7642	5285
0.73	2327	7673	5346
0.74	2296	7704	5407
0.75	2266	7734	5467
0.76	2236	7764	5527
0.77	2206	7794	5587
0.78	2177	7823	5646
0.79	2148	7852	5705
0.80	2119	7881	5763
0.81	2090	7910	5821
0.82	2061	7939	5878
0.83	2033	7967	5935
0.84	2005	7995	5991
0.85	1977	8023	6047
0.86	1949	8051	6102
0.87	1922	8078	6157
0.88	1894	8106	6211
0.89	1867	8133	6265
0.90	1841	8159	6319
0.91	1814	8186	6372
0.92	1788	8212	6424
0.93	1762	8238	6476
0.94	1736	8264	6528
0.95	1711	8289	6579
0.96	1685	8315	6629
0.97	1660	8340	6680
0.98	1635	8365	6729
0.99	1611	8389	6778
1.00	1587	8413	6827

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
1.01	1562	8438	6875
1.02	1539	8461	6923
1.03	1515	8485	6970
1.04	1492	8508	7017
1.05	1469	8531	7063
1.06	1446	8554	7109
1.07	1423	8577	7154
1.08	1401	8599	7199
1.09	1379	8621	7243
1.10	1357	8643	7287
1.11	1335	8665	7330
1.12	1314	8686	7373
1.13	1292	8708	7415
1.14	1271	8729	7457
1.15	1251	8749	7499
1.16	1230	8770	7540
1.17	1210	8790	7580
1.18	1190	8810	7620
1.19	1170	8830	7660
1.20	1151	8849	7699
1.21	1131	8869	7737
1.22	1112	8888	7775
1.23	1093	8907	7813
1.24	1075	8925	7850
1.25	1056	8944	7887
1.26	1038	8962	7923
1.27	1020	8980	7959
1.28	1003	8997	7995
1.29	0985	9015	8029
1.30	0968	9032	8064
1.31	0951	9049	8098
1.32	0934	9066	8132
1.33	0918	9082	8165
1.34	0901	9099	8198
1.35	0885	9115	8230
1.36	0869	9131	8262
1.37	0853	9147	8293
1.38	0838	9162	8324
1.39	0823	9177	8355
1.40	0808	9192	8385
1.41	0793	9207	8415
1.42	0778	9222	8444
1.43	0764	9236	8473
1.44	0749	9251	8501
1.45	0735	9265	8529
1.46	0721	9279	8557
1.47	0708	9292	8584
1.48	0694	9306	8611
1.49	0681	9319	8638
1.50	0668	9332	8664





z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
1.51	0655	9345	8690
1.52	0643	9357	8715
1.53	0630	9370	8740
1.54	0618	9382	8764
1.55	0606	9394	8789
1.56	0594	9406	8812
1.57	0582	9418	8836
1.58	0571	9429	8859
1.59	0559	9441	8882
1.60	0548	9452	8904
1.61	0537	9463	8926
1.62	0526	9474	8948
1.63	0516	9484	8969
1.64	0505	9495	8990
1.65	0495	9505	9011
1.66	0485	9515	9031
1.67	0475	9525	9051
1.68	0465	9535	9070
1.69	0455	9545	9090
1.70	0446	9554	9109
1.71	0436	9564	9127
1.72	0427	9573	9146
1.73	0418	9582	9164
1.74	0409	9591	9181
1.75	0401	9599	9199
1.76	0392	9608	9216
1.77	0384	9616	9233
1.78	0375	9625	9249
1.79	0367	9633	9265
1.80	0359	9641	9281
1.81	0351	9649	9297
1.82	0344	9656	9312
1.83	0336	9664	9328
1.84	0329	9671	9342
1.85	0322	9678	9357
1.86	0314	9686	9371
1.87	0307	9693	9385
1.88	0301	9699	9399
1.89	0294	9706	9412
1.90	0287	9713	9426
1.91	0281	9719	9439
1.92	0274	9726	9451
1.93	0268	9732	9464
1.94	0262	9738	9476
1.95	0256	9744	9488
1.96	0250	9750	9500
1.97	0244	9756	9512
1.98	0239	9761	9523
1.99	0233	9767	9534
2.00	0228	9772	9545

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
2.01	0222	9778	9556
2.02	0217	9783	9566
2.03	0212	9788	9576
2.04	0207	9793	9586
2.05	0202	9798	9596
2.06	0197	9803	9606
2.07	0192	9808	9615
2.08	0188	9812	9625
2.09	0183	9817	9634
2.10	0179	9821	9643
2.11	0174	9826	9651
2.12	0170	9830	9660
2.13	0166	9834	9668
2.14	0162	9838	9676
2.15	0158	9842	9684
2.16	0154	9846	9692
2.17	0150	9850	9700
2.18	0146	9854	9707
2.19	0143	9857	9715
2.20	0139	9861	9722
2.21	0136	9864	9729
2.22	0132	9868	9736
2.23	0129	9871	9743
2.24	0125	9875	9749
2.25	0122	9878	9756
2.26	0119	9881	9762
2.27	0116	9884	9768
2.28	0113	9887	9774
2.29	0110	9890	9780
2.30	0107	9893	9786
2.31	0104	9896	9791
2.32	0102	9898	9797
2.33	0099	9901	9802
2.34	0096	9904	9807
2.35	0094	9906	9812
2.36	0091	9909	9817
2.37	0089	9911	9822
2.38	0087	9913	9827
2.39	0084	9916	9832
2.40	0082	9918	9836
2.41	0080	9920	9840
2.42	0078	9922	9845
2.43	0075	9925	9849
2.44	0073	9927	9853
2.45	0071	9929	9857
2.46	0069	9931	9861
2.47	0068	9932	9865
2.48	0066	9934	9869
2.49	0064	9936	9872
2.50	0062	9938	9876

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
	0.	0.	0.
2.51	0060	9940	9879
2.52	0059	9941	9883
2.53	0057	9943	9886
2.54	0055	9945	9889
2.55	0054	9946	9892
2.56	0052	9948	9895
2.57	0051	9949	9898
2.58	0049	9951	9901
2.59	0048	9952	9904
2.60	0047	9953	9907
2.61	0045	9955	9909
2.62	0044	9956	9912
2.63	0043	9957	9915
2.64	0041	9959	9917
2.65	0040	9960	9920
2.66	0039	9961	9922
2.67	0038	9962	9924
2.68	0037	9963	9926
2.69	0036	9964	9929
2.70	0035	9965	9931
2.71	0034	9966	9933
2.72	0033	9967	9935
2.73	0032	9968	9937
2.74	0031	9969	9939
2.75	0030	9970	9940
2.76	0029	9971	9942
2.77	0028	9972	9944
2.78	0027	9973	9946
2.79	0026	9974	9947
2.80	0026	9974	9949
2.81	0025	9975	9950
2.82	0024	9976	9952
2.83	0023	9977	9953
2.84	0023	9977	9955
2.85	0022	9978	9956
2.86	0021	9979	9958
2.87	0021	9979	9959
2.88	0020	9980	9960
2.89	0019	9981	9961
2.90	0019	9981	9963
2.91	0018	9982	9964
2.92	0018	9982	9965
2.93	0017	9983	9966
2.94	0016	9984	9967
2.95	0016	9984	9968
2.96	0015	9985	9969
2.97	0015	9985	9970
2.98	0014	9986	9971
2.99	0014	9986	9972
3.00	0013	9987	9973